

様々な圏における射の圏論的特徴付け（エピ射とモノ射）

圏論において、「全射」や「単射」、「商空間」や「部分空間」に相当する概念は、それぞれエピ射 (epimorphism) やモノ射 (monomorphism)、およびそれらの正則 (regular) なバリエーションを用いて特徴付けられる。

本稿では、集合、群、Abel群、可換環、位相空間、Hausdorff空間、コンパクトHausdorff空間、そして完全不連結コンパクトHausdorff空間の8つの代表的な圏におけるエピ射と正則エピ射、さらにモノ射と正則モノ射の圏論的特徴付けについて、自己完結的な解説を行う。正則な射が一般の射に包含されることの証明、そして可換環の圏における非自明な振る舞いの詳細な解説もあわせてまとめた。

圏論的な準備

エピ射（全射的・商的性質の抽象化）

定義 (エピ射)

圏 C における射 $f: X \rightarrow Y$ がエピ射 (epimorphism) であるとは、任意の対象 Z と任意の射 $g, h: Y \rightarrow Z$ に対して、 $g \circ f = h \circ f$ ならば $g = h$ が成り立つことである。これは写像の「全射性」を、右簡約法則 (right cancellation property) によって抽象化した概念である。

定義 (正則エピ射)

圏 C における射 $e: X \rightarrow Y$ が正則エピ射 (regular epimorphism) であるとは、ある対象 W と射の対 $u, v: W \rightarrow X$ が存在して、 e が u と v の余等化子 (coequalizer) になっていることである。

ここで、 $e: X \rightarrow Y$ が u, v の余等化子であるとは、 $e \circ u = e \circ v$ を満たし、かつ同じ条件 $q \circ u = q \circ v$ を満たす任意の対象 Z と射 $q: X \rightarrow Z$ に対して、一意な射 $k: Y \rightarrow Z$ が存在して $q = k \circ e$ と分解できることである。これは「同値関係による商 (quotient by an equivalence relation)」の普遍性を抽象化したものである。

命題 0.1 (正則エピ射はエピ射である)

任意の圏において、正則エピ射は必ずエピ射となる。

証明

$f: X \rightarrow Y$ を射 $u, v: W \rightarrow X$ の余等化子とする。任意の射 $g, h: Y \rightarrow Z$ について、 $g \circ f = h \circ f$ が成り立つと

仮定し、この共通の射を $q: X \rightarrow Z$ とおく。

$f \circ u = f \circ v$ であるため、 $q \circ u = g \circ f \circ u = g \circ f \circ v = q \circ v$ が成り立つ。余等化子の普遍性により、 $q \circ u = q \circ v$ を満たす射 q に対しては、 $q = k \circ f$ を満たすような射 $k: Y \rightarrow Z$ が一意に存在する。仮定より g も h もこの条件を満たしているため、一意性により $g = h$ となる。よって f はエピ射である。■

モノ射 (単射的・部分空間的性質の抽象化)

定義 (モノ射)

圏 C における射 $f: X \rightarrow Y$ がモノ射 (monomorphism) であるとは、任意の対象 W と任意の射 $g, h: W \rightarrow X$ に対して、 $f \circ g = f \circ h$ ならば $g = h$ が成り立つことである。これは写像の「単射性」を、左簡約法則 (left cancellation property) によって抽象化した概念である。

定義 (正則モノ射)

圏 C における射 $m: X \rightarrow Y$ が正則モノ射 (regular monomorphism) であるとは、ある対象 Z と射の対 $u, v: Y \rightarrow Z$ が存在して、 m が u と v の等化子 (equalizer) になっていることである。

ここで、 $m: X \rightarrow Y$ が u, v の等化子であるとは、 $u \circ m = v \circ m$ を満たし、かつ同じ条件 $u \circ p = v \circ p$ を満たす任意の対象 W と射 $p: W \rightarrow Y$ に対して、一意な射 $k: W \rightarrow X$ が存在して $p = m \circ k$ と分解できることである。これは「条件式で定義された部分空間や部分群」の普遍性を抽象化したものである。

命題 0.2 (正則モノ射はモノ射である)

任意の圏において、正則モノ射は必ずモノ射となる。

証明

命題0.1の双対 (dual) である。 $m: X \rightarrow Y$ を $u, v: Y \rightarrow Z$ の等化子とする。任意の射 $g, h: W \rightarrow X$ について、 $m \circ g = m \circ h$ が成り立つと仮定し、この共通の射を $p: W \rightarrow Y$ とおく。

$u \circ p = u \circ m \circ g = v \circ m \circ g = v \circ p$ となるため、 p は等化子の条件を満たす。等化子の普遍性により、 $p = m \circ k$ を満たす射 $k: W \rightarrow X$ は一意に定まる。仮定より g も h もこの条件を満たすため、 $g = h$ となる。よって m はモノ射である。■

1. 集合の圏 Set

エピ射と正則エピ射

命題 1.1

Set において、射 $f: X \rightarrow Y$ がエピ射、および正則エピ射であるための必要十分条件は、 f が**全射 (surjection)** となることである。

証明

全射が正則エピ射（したがってエピ射）であることを示す。全射 $f: X \rightarrow Y$ に対し、関係 $R = \{(x, x') \in X \times X \mid f(x) = f(x')\}$ を定義し、射影 $p_1, p_2: R \rightarrow X$ を考える。 $f \circ p_1 = f \circ p_2$ は定義より明らかである。任意の集合 Z と写像 $g: X \rightarrow Z$ が $g \circ p_1 = g \circ p_2$ を満たすとき、 $f(x) = f(x')$ ならば $g(x) = g(x')$ となる。 f は全射であるため、各 $y \in Y$ に対して $y = f(x)$ となる x を選び、 $k(y) = g(x)$ と定義すれば $k: Y \rightarrow Z$ は well-defined であり $g = k \circ f$ と一意に分解できる。よって全射は余等化子である。

逆にエピ射が全射であることを示す。 $f: X \rightarrow Y$ が全射でないを仮定し、 $y_0 \in Y \setminus f(X)$ をとる。2点集合 $\{0, 1\}$ を終域とし、 $g(y) = 0$ (定数写像)、 $h(y) = 0$ ($y \in f(X)$) かつ $h(y) = 1$ ($y \notin f(X)$) と定義する。このとき $g \circ f = h \circ f$ であるが $g \neq h$ となり、エピ射の定義に反する。よってエピ射は全射である。■

モノ射と正則モノ射

命題 1.2

Set において、射 $f: X \rightarrow Y$ がモノ射、および正則モノ射であるための必要十分条件は、 f が**単射 (injection)** となることである。

証明

f が単射であれば、任意の写像 $g, h: W \rightarrow X$ について $f(g(w)) = f(h(w))$ ならば $g(w) = h(w)$ となるため、モノ射である。逆にモノ射であるとき、一点集合 $W = \{*\}$ からの写像（すなわち X の要素の指定）を考えると、容易に単射性が導かれる。

さらに単射 $f: X \rightarrow Y$ が正則モノ射であること（等化子であること）を示す。集合 $Z = Y \cup \{*\}$ (ただし $*$ は Y に属さない要素) をとる。2つの写像 $u, v: Y \rightarrow Z$ を、 $u(y) = y$ (包含写像)、および $y \in f(X)$ のときは $v(y) = y$ 、 $y \notin f(X)$ のときは $v(y) = *$ と定義する。このとき、 $u(y) = v(y)$ となるのは $y \in f(X)$ のときに限られる。 f は単射であるため、定義域 X は像 $f(X)$ と全単射であり、 f は u, v の等化子の普遍性を満たす。■

2. 群の圏 Grp

エピ射と正則エピ射

命題 2.1

Grp において、射 $f: G \rightarrow H$ がエピ射、および正則エピ射であるための必要十分条件は、 f が**全射**となることである。

証明

全射が正則エピ射であることを示す。全射 $f: G \rightarrow H$ の核を $N = \ker(f)$ とすると、第一同型定理より $H \cong G/N$ である。群の商写像は、常に自明な準同型 $G \rightarrow G (x \mapsto e)$ と包含写像 $N \hookrightarrow G$ から誘導される適切な作用の余等化子として構成できるため、全射は正則エピ射である。

逆にエピ射が全射であることを示す (Linderholm, 1970 などの手法による融合積を用いた証明)。 $f: G \rightarrow H$ が全射でないとする。像 $K = f(G)$ は H の真の部分群である。 K で融合した2つの H の融合積 $H *_K H$ を考える。 H からこの融合積への2つの自然な包含準同型を u, v とすると、融合積の性質により $u(y) = v(y)$ となるのは $y \in K$ のときに限る。したがって $u \circ f = v \circ f$ は成り立つが、 $K \neq H$ より $u \neq v$ である。これは f がエピ射であることに反する。よってエピ射は全射である。 ■

モノ射と正則モノ射

命題 2.2

Grp において、射 $f: G \rightarrow H$ がモノ射、および正則モノ射であるための必要十分条件は、 f が**単射**となることである。

証明

モノ射が単射であることは、**Set** と同様に自明な群 \mathbb{Z} (自由群) などからの射を考えることで示される。逆に、単射が正則モノ射であることを示す。

$f: G \rightarrow H$ を単射とする。像 $K = f(G)$ は H の部分群である。 H の2つのコピーを K で貼り合わせた融合積 (amalgamated free product) $H *_K H$ を考え、2つの自然な包含準同型を $u, v: H \rightarrow H *_K H$ とする。融合積の性質により、 $u(y) = v(y)$ となるのは $y \in K$ のときに限られる。 f は G から K への同型を与えるため、 f は u と v の等化子となる。したがって、単射は正則モノ射である。 ■

3. Abel群の圏 **Ab**

エピ射と正則エピ射

命題 3.1

Abにおいて、射 $f: A \rightarrow B$ がエピ射、および正則エピ射であるための必要十分条件は、 f が**全射**となることである。

証明

Ab ではすべての部分群が正規部分群となるため構成が平易になる。 $f: A \rightarrow B$ がエピ射であるとき、像 $f(A)$ による商群 $B/f(A)$ を考える。自然な射影 $\pi: B \rightarrow B/f(A)$ とゼロ準同型 $0: B \rightarrow B/f(A)$ を比較すると、 $\pi \circ f = 0 \circ f = 0$ が成り立つ。 f がエピ射であるため $\pi = 0$ となり、 $B/f(A) = 0$ 、すなわち $f(A) = B$ (全射) となる。

また、任意の全射 $f: A \rightarrow B$ はその核 $K = \ker(f)$ による商写像とみなせるため、 $A \times A$ 内の同値関係からの2つの射影の余等化子となり、正則エピ射である。■

モノ射と正則モノ射

命題 3.2

Abにおいて、射 $f: A \rightarrow B$ がモノ射、および正則モノ射であるための必要十分条件は、 f が**単射**となることである。

証明

単射が正則モノ射であることを示す。単射 $f: A \rightarrow B$ に対して、像 $K = f(A)$ による商群 $C = B/K$ をとる。自然な射影を $u: B \rightarrow C$ 、ゼロ準同型を $v: B \rightarrow C (v(b) = 0)$ とする。 $u(b) = v(b)$ となるのは $b \in \ker(u) = K$ のときに限られるため、 f は u, v の等化子となる。よって、すべての単射は正則モノ射である。■

4. 可換環の圏 CRing

エピ射と正則エピ射

命題 4.1 (正則エピ射と全射)

CRing において、射 $f: A \rightarrow B$ が正則エピ射であるための必要十分条件は、 f が**全射な環準同型**となることである。

証明

CRing における余等化子について考える。任意の環準同型 $u, v: W \rightarrow A$ に対する余等化子は、商環 A/I (ただし

I は $u(w) - v(w)$ で生成されるイデアル) への自然な射影となる。商環への射影は常に全射であるため、正則エピ射は全射である。逆に全射 $f: A \rightarrow B$ について $I = \ker(f)$ とすると、 f は自然な商環 $A \rightarrow A/I \cong B$ の射影となるため、余等化子の普遍性を満たす。■

命題 4.2 (エピ射の特徴付け)

CRing において、射 $f: A \rightarrow B$ がエピ射であるための必要十分条件は、テンソル積を用いた乗法写像 $\mu: B \otimes_A B \rightarrow B; b_1 \otimes b_2 \mapsto b_1 b_2$ が同型射となることである。したがって、**全射でないエピ射が存在する。**

証明

$B \otimes_A B$ の環構造と普遍性から導かれる。もし μ が同型であれば、 B から任意の環 C への2つの準同型 g, h が A 上で一致する ($g \circ f = h \circ f$) とき、テンソル積の普遍性により $B \otimes_A B \rightarrow C$ が定義でき、 $g = h$ が導かれるため f はエピ射となる。逆に f がエピ射のとき、 μ の逆写像を構成できる。

例 (局所化) : 包含準同型 $i: \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ は全射ではないが、エピ射である。実際、2つの環準同型 $g, h: \mathbb{Q} \rightarrow C$ が \mathbb{Z} 上で一致する (任意の整数 n について $g(n) = h(n)$) とする。任意の有理数 $q = m/n \in \mathbb{Q}$ ($n \neq 0$) に対して $ng = m$ が成り立つ。両辺を g, h で送ると、環準同型の性質から $g(n)g(q) = g(m)$ かつ $h(n)h(q) = h(m)$ となる。 $g(m) = h(m)$ であり、かつ $g(n) = h(n)$ は C において可逆であるため、両辺に逆元を掛けて $g(q) = h(q)$ を得る。よって $g = h$ となり、 i はエピ射である。■

モノ射と正則モノ射

命題 4.3

CRing において、モノ射は**単射**な環準同型であるが、すべての単射が正則モノ射とは限らない。

証明

$f: R \rightarrow S$ がモノ射であるとする。 R の要素 $x \neq y$ が $f(x) = f(y)$ を満たすと仮定する。多項式環 $\mathbb{Z}[t]$ から R への環準同型 $g, h: \mathbb{Z}[t] \rightarrow R$ を、 $g(t) = x$ 、 $h(t) = y$ となるように定義する。このとき $f \circ g = f \circ h$ であるが、 $g \neq h$ となり、モノ射の定義に反する。よって f は単射である。

正則でないモノ射の詳細な特徴付け

なぜ **CRing** において単射であっても正則モノ射にならない例が生じるのかを理解するためには、任意の圏で成り立つ以下の強力な事実が鍵となる。

命題 4.4 (エピ射と正則モノ射の衝突)

任意の圏 C において、射 $f: X \rightarrow Y$ がエピ射であり、かつ正則モノ射でもあるならば、 f は同型射 (isomorphism) となる。

証明

f が正則モノ射であるため、ある対象 Z と射の対 $u, v: Y \rightarrow Z$ の等化子になっている。等化子の定義から $u \circ f = v \circ f$ が成り立つ。

ここで f がエピ射であるという仮定 (右簡約法則) を用いると、直ちに $u = v$ が従う。

したがって、 f は「 u と u の等化子」ということになる。自分自身と同一の射の等化子は、対象 Y 自身 (および恒等射 id_Y) に他ならない。普遍性により X と Y は同型となり、 f は同型射であることが示された。■

例 4.5 : 局所化による包含準同型

有理整数環から有理数体への包含 $i: \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ は単射であるためモノ射であり、命題 4.2 で示したようにエピ射でもある。しかし同型射ではないため、命題 4.4 により正則モノ射にはならない。

命題 4.6 (不変式環への包含は正則モノ射)

群 G が可換環 B に自己同型として作用しているとする。このとき、不変式環 B^G から B への包含準同型 $i: B^G \hookrightarrow B$ は、**CRing** における正則モノ射である。

証明

$i: B^G \hookrightarrow B$ が等化子となるような環 C と環準同型 $u, v: B \rightarrow C$ を構成する。

$C = \prod_{g \in G} B$ (すなわち B の $|G|$ 個の直積) とする。射 $u, v: B \rightarrow C$ を以下のように定義する。

- $u(b) = (b)_{g \in G}$ (対角埋め込み)
- $v(b) = (g \cdot b)_{g \in G}$ (群作用による埋め込み)

群作用は環の自己同型であるため、 v もまた環準同型となる (要素ごとの和と積を保つ)。これらの等化子 E は、定義により $u(b) = v(b)$ を満たす $b \in B$ の集合である。

$$u(b) = v(b) \iff \text{任意の } g \in G \text{ について } b = g \cdot b$$

この条件を満たす b の集合は、まさに不変式環 B^G の定義そのものである。したがって、等化子は B^G であり、包含準同型 $i: B^G \hookrightarrow B$ は正則モノ射である。■

幾何学的な直観：アフィンスキームの商空間 (空間の折りたたみ)

代数的な定義（等化子）だけではその振る舞いの本質が見えにくいですが、これを双対圏であるアフィンスキームの圏 \mathbf{Aff} ($\mathbf{CRing}^{\text{op}} \simeq \mathbf{Aff}$) に翻訳すると、極めて明快な幾何学的意味が現れる。

代数: \mathbf{CRing} の圏	幾何: \mathbf{Aff} の圏	直観的な幾何学的意味
正則エピ射 (全射 $A \rightarrow A/I$)	正則モノ射 (等化子)	閉部分空間への埋め込み (方程式 $I = 0$ で切り出される部分図形)
正則モノ射 (等化子 $A \hookrightarrow B$)	正則エピ射 (余等化子)	商空間への射影 (同値関係によって空間全体を折りたたむ操作)

\mathbf{CRing} における正則モノ射は、幾何学的には「空間 $\text{Spec}(B)$ をある同値関係で割り当てて、商空間 $\text{Spec}(A)$ を作る全射的な写像（商写像）」に対応する。つまり、正則モノ射のドメインである環 A は、ただの部分環ではなく、「元の空間を綺麗に折りたたんでできた底空間（ベース）の座標環」として直観的に理解されるべきである。

- **正則モノ射になる例（不変式環）**：命題 4.6 で示した通り、群作用で不変な要素を集めた部分環 B^G への包含写像 $B^G \hookrightarrow B$ は正則モノ射である。幾何学的には、これは射 $\text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(B^G)$ に対応し、空間の各点を群 G の軌道で同一視して潰す「商空間への射影」そのものである。
- **正則モノ射にならない例（局所化）**：局所化 $i: \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ の双対である射 $\text{Spec}(\mathbb{Q}) \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{Z})$ は、素数全体からなる空間の中から「生成点」を1点だけ抜き出してくる操作であり、空間全体を同値関係で折りたたむ「商写像」としての性質を全く持たない。したがって、その双対である局所化は等化子（正則モノ射）にはなり得ない。

5. 位相空間の圏 \mathbf{Top}

エピ射と正則エピ射

命題 5.1

\mathbf{Top} において、エピ射は全射な連続写像であり、正則エピ射は位相空間論における商写像 (quotient map) と完全に一致する。

証明

エピ射が全射であることは、 \mathbf{Set} の場合と同様に、2点からなる密着空間 (indiscrete space) への写像を構築することで示される。

正則エピ射について考える。 \mathbf{Top} における余等化子は、集合としての余等化子（同値関係による商集合）に商位相 (quotient topology) を入れたものとして構成される。商写像の定義（終域の位相が始域からの写像によって誘導される最強の位相であること）は、まさに連続写像の圏における普遍性（余等化子）を満たす条件そのものであるため、両者は一致する。■

モノ射と正則モノ射

命題 5.2

Top において、モノ射は**単射な連続写像**である。一方、正則モノ射は**相対位相をもつ部分空間への埋め込み (topological embedding)** である。

証明

単射な連続写像がモノ射であることは一点空間を用いて容易に示せる。

正則モノ射 $f: X \rightarrow Y$ はある連続写像 $u, v: Y \rightarrow Z$ の等化子である。**Top** における等化子は、集合としての等化子 $E = \{y \in Y \mid u(y) = v(y)\}$ に Y からの相対位相 (subspace topology) を入れたものとなる。したがって、 f は単なる単射な連続写像ではなく、像への同相写像、すなわち位相的な埋め込み (embedding) でなければならない。

逆に、埋め込み $f: X \rightarrow Y$ は正則モノ射である。像 $f(X)$ を A とし、 Y の2つのコピーを A で貼り合わせた空間 $Z = Y \cup_A Y$ に商位相を入れると、 Y から Z への2つの自然な埋め込みの等化子はちょうど A (すなわち X) となるためである。■

6. Hausdorff空間の圏 Haus

エピ射と正則エピ射

命題 6.1

Haus において、エピ射は**像が稠密な連続写像**であり、正則エピ射は**終域がHausdorff空間となる商写像**である。

証明

エピ射 $f: X \rightarrow Y$ を考える。もし $f(X)$ が Y で稠密でないとする、 $y_0 \in Y \setminus \overline{f(X)}$ が存在する。 Y の2つのコピーを閉集合 $\overline{f(X)}$ で貼り合わせた空間 $Z = Y \cup_{\overline{f(X)}} Y$ を構成すると、貼り合わせ部分が閉集合であるため Z も Hausdorff となる。 Y から Z への2つの自然な埋め込み g, h を考えると、 $g \circ f = h \circ f$ であるが $g(y_0) \neq h(y_0)$ となるため、エピ射の定義に反する。よってエピ射の像は稠密である。

正則エピ射は、**Top** における余等化子にさらに Hausdorff 化 (最大の Hausdorff 商) を施すことで得られるため、終域が Hausdorff となる商写像と一致する。■

モノ射と正則モノ射

命題 6.2

Haus において、モノ射は**単射な連続写像**である。一方、正則モノ射は**閉部分空間への埋め込み (closed**

embedding) である。

証明

正則モノ射 $f: X \rightarrow Y$ がある連続写像 $u, v: Y \rightarrow Z$ (Z は Hausdorff) の等化子であるとする。Hausdorff空間への2つの連続写像が一致する点の集合 $E = \{y \in Y \mid u(y) = v(y)\}$ は、 Y の閉集合 (closed subset) である。したがって、 f は閉部分空間への位相的な埋め込みとなる。

逆に、閉部分空間への埋め込み $f: X \rightarrow Y$ を考える。像 $A = f(X)$ は閉集合である。**Top** の証明と同様に貼り合わせ空間 $Z = Y \cup_A Y$ を構成すると、 A が閉集合であるおかげで Z もまた Hausdorff空間となる。したがって f は **Haus** における等化子 (正則モノ射) となる。■

7. コンパクト Hausdorff空間の圏 CHaus

エピ射と正則エピ射

命題 7.1

CHaus では、エピ射および正則エピ射はともに**全射な連続写像 (商写像に等しい)** に一致する。

証明

エピ射が全射であることを示す。 $f: X \rightarrow Y$ をエピ射とする。**Haus** と同様に f の像は稠密である必要がある。さらに、 X がコンパクトで f が連続であるため、像 $f(X)$ はコンパクトであり、 Y が Hausdorff であることから $f(X)$ は閉集合となる。稠密かつ閉である部分集合は空間全体に一致するため、 $f(X) = Y$ となり全射である。

全射が正則エピ射となることは、コンパクト空間から Hausdorff空間への全射連続写像が自動的に商写像になるという位相空間論の基本事実から従う。■

モノ射と正則モノ射

命題 7.2

CHaus において、モノ射および正則モノ射はともに**単射な連続写像**である。

証明

モノ射が単射な連続写像であることは自明である。単射な連続写像 $f: X \rightarrow Y$ (X, Y はコンパクト Hausdorff) を考

える。コンパクト空間からHausdorff空間への連続写像は閉写像 (closed map) であるため、 f の像 $f(X)$ は閉集合であり、 f は像の上への同相写像 (位相的埋め込み) となる。すなわち、 f は自動的に閉部分空間への埋め込み (closed embedding) となる。**Haus** における結果により、閉部分空間への埋め込みは等化子 (正則モノ射) であるため、**CHaus** ではすべての単射 (モノ射) が正則モノ射となる。■

8. 完全不連結コンパクトHausdorff空間の圏 Stone

完全不連結なコンパクトHausdorff空間は**Stone空間 (Stone space)** とも呼ばれる。**Stone** はブール代数の圏 **Bool** と反変同値になるという強力な事実 (ストーンの双対性) があり、**Bool** におけるモノ射 (単射な準同型) とエピ射 (全射な準同型) が、双対的に **Stone** におけるエピ射とモノ射にそれぞれ対応している。

エピ射と正則エピ射

命題 8.1

Stone では、エピ射および正則エピ射はともに**全射な連続写像**に一致する。

証明

CHaus の充満部分圏であるため、エピ射が全射であることの証明はコンパクト性とHausdorff性の議論がそのまま適用でき、像の稠密性と閉集合性から全射が導かれる。

全射な連続写像 $f: X \rightarrow Y$ が **Stone** 内で正則エピ射 (余等化子) となることを示す。 f から誘導される同値関係 $R = \{(x, x') \in X \times X \mid f(x) = f(x')\}$ は $X \times X$ の閉部分空間である。Stone空間の直積および閉部分空間はまたStone空間となるため、 R は **Stone** の対象である。商空間としての Y は **Top** における余等化子であり、かつ与えられたStone空間であるため、そのまま **Stone** における余等化子として機能する。■

モノ射と正則モノ射

命題 8.2

Stone において、モノ射および正則モノ射はともに**単射な連続写像**である。

証明

CHaus と同様に、単射な連続写像 $f: X \rightarrow Y$ は閉部分空間への埋め込みとなる。Stone空間の閉部分空間はまたStone空間であるため、**CHaus** と全く同じ等化子の構成 (貼り合わせ空間を用いる方法、あるいはストーン・チェ

ック・コンパクト化等の適切な構成を通す方法)に頼るまでもなく、**Top**での等化子である閉部分空間そのものが**Stone**の対象となる。したがって、**Stone**でも単射は常に等化子(正則モノ射)となる。■

結果のまとめ

以上の各圏におけるエピ射、正則エピ射、モノ射、正則モノ射の圏論的特徴付けを以下の表にまとめる。

圏	対象	エピ射 (Epi)	正則エピ射 (Reg Epi)	モノ射 (Mono)	正則モノ射 (Reg Mono)
Set	集合	全射	全射	単射	単射
Grp	群	全射	全射	単射	単射
Ab	Abel群	全射	全射	単射	単射
CRing	可換環	全射とは限らない (例: $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$)	全射な環準同型	単射	等化子として得られる部分環の埋め込み (商空間の底の座標環に対応)
Top	位相空間	全射	商写像	単射	部分空間への埋め込み (Embedding)
Haus	Hausdorff空間	像が稠密な連続写像	終域がHausdorffな商写像	単射	閉部分空間への埋め込み (Closed Embedding)
CHaus	コンパクト Hausdorff空間	全射 (商写像に一致)	全射	単射	単射 (閉部分空間への埋め込みに一致)
Stone	完全不連結コンパクト Hausdorff空間	全射	全射	単射	単射

参考文献

- Mac Lane, S. (1998). *Categories for the Working Mathematician* (2nd ed.). Springer-Verlag. URL: <https://link.springer.com/book/10.1007/978-1-4757-4721-8>
- Gleason, A. M. (1958). Projective topological spaces. *Illinois Journal of Mathematics*, 2(4), 482-489. URL: <https://projecteuclid.org/journals/illinois-journal-of-mathematics/volume-2/issue-4A/Projective-topological-spaces/10.1215/ijm/1255454110.full>
- Linderholm, C. E. (1970). A group epimorphism is surjective. *The American Mathematical Monthly*, 77(2), 176-177. URL: <https://doi.org/10.1080/00029890.1970.11992448>